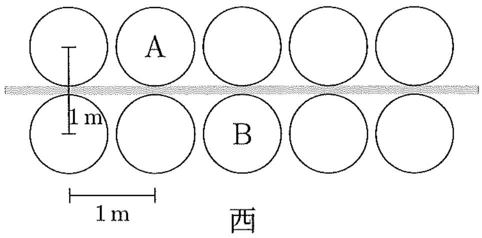
数学 I

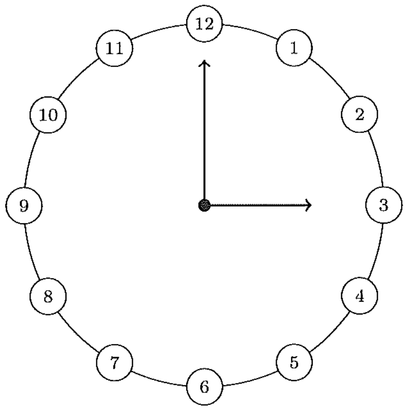
(1)　ある公園に，図のように 10 個の丸い椅子が，東側に 5 個横一列に，西側に 5 個横一列に，それぞれ 1 m 間隔で置かれている．また，東側の椅子と西側の椅子は 2 つずつ背中合わせに置かれていて，その間隔は 1 m となっている．



A さんはいつも東側の椅子のいずれかに，B さんは西側の椅子のいずれかに，同じ確率で座る．このとき，A さんと B さんの座る位置がソーシャルディスタンスの 2 m 以上である確率は $\dfrac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}\boxed{(4)}}$ である．

なお，A さんも B さんも椅子の中心に座り，ソーシャルディスタンスは座っている椅子の中心間の距離で測るものとする．

(2)　別の公園には，半径 2 m の円周上の地面に時計の文字盤が刻んであり，1 時間ごと，すなわち 30 度ごとに丸い椅子が置いてある．



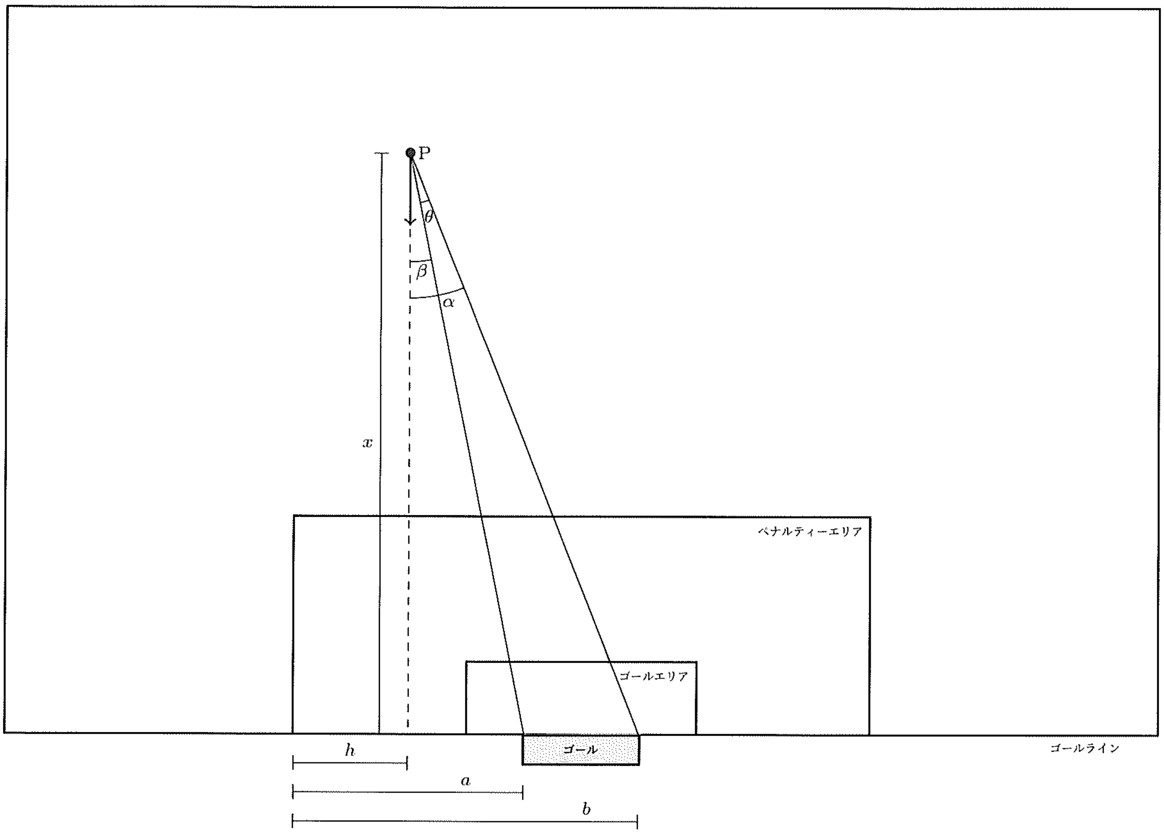
この円形に配置された 12 脚の椅子に，来場者 3 人がやってきて任意の位置に座るとき，お互いがソーシャルディスタンスの 2 m 以上である確率は $\dfrac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)}}$ である．

なお，同じ椅子に複数の人が座ることはなく，人は椅子の中心に座り，ソーシャルディスタンスは座っている椅子の中心間の距離で測るものとする．

総

数学Ⅱ

サッカー選手Ｐは下図のようにペナルティーエリアの左端の線を延長した線のゴール寄り右 3 m をドリブルで敵陣にまっすぐ向かっている．Ｐがゴールに向かってシュートするとき，Ｐから見てゴールの見える範囲が大きいほうが得策である．すなわち，下図のような配置で $h = 3\,\mathrm{m}$ のとき，選手Ｐが蹴り込める角度範囲である θ が最も大きくなるＰのゴールラインからの距離 x を求めたい．ただし，ゴールは下図のようにペナルティーエリアの左右の中央で，ゴールラインの外側に設置されているものとする．



これは，レギオモンタヌスの問題として知られている問題の一種である．一般に，上図のようにペナルティーエリアの左端からゴールの左端までの距離を a，ペナルティーエリアの左端からゴールの右端までの距離を b，Ｐのドリブルのラインとペナルティーエリアの左端までの距離を h (ただし $h < a$ とする)，Ｐからゴールラインまでの距離を x，Ｐの正面から右のゴールポストまでの角度を α，Ｐの正面から左のゴールポストまでの角度を β としたとき，$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ ～ $\boxed{(27)}\boxed{(28)}$ に次頁の選択肢から最も適切な番号を選び，次頁の解法の文章を完成させなさい．

(解法)　$\tan\theta$ を最も大きくする x を求める問題と考えることができる.

$$\tan\theta = \tan\boxed{(11)}\boxed{(12)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\boxed{(13)}\boxed{(14)} \times x}{x^2 + \boxed{(15)}\boxed{(16)}}$$

$\tan\theta$ の逆数を考えると，相加相乗平均の定理より

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{\boxed{(17)}\boxed{(18)}} + \frac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{x \times \boxed{(21)}\boxed{(22)}} \geqq \frac{2}{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}\sqrt{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$$

であり，$\dfrac{1}{\tan\theta}$ が最小，すなわち $\tan\theta$ が最大となるのは，$x = \sqrt{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}$ のときである.

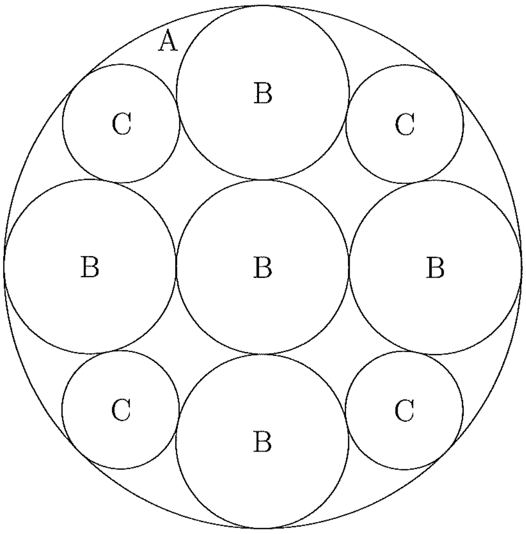
選択肢: (01)　1	(02)　2	(03)　3	(04)　4
(05)　a	(06)　b	(07)　h	(08)　x
(09)　α	(10)　β	(11)　$(\alpha+\beta)$	(12)　$(\alpha-\beta)$
(13)　$(a+b)$	(14)　$(a-b)$	(15)　$(b-a)$	(16)　$(a-h)$
(17)　$(b-h)$	(18)　$(a-h)(b-h)$	(19)　$(a+h)$	(20)　$(b+h)$
(21)　$(a+h)(b+h)$	(22)　ab	(23)　h^2	(24)　$(a-b-h)$

(解法終わり)

ペナルティーエリアの横幅を 40 m，ゴールの横幅を 8 m とすると，今回のサッカー選手 P の場合，$x = \sqrt{\boxed{(29)}\boxed{(30)}\boxed{(31)}}$ m のときに，θ が最も大きくなることが分かる.

総

数学Ⅲ



図のように円Ａの中に，５つの円Ｂと４つの円Ｃが含まれている．中心の円Ｂは他の４つの円Ｂに接し，他の４つの円Ｂのそれぞれは中心の円Ｂと円Ａと２つの円Ｃに接している．４つの円Ｃのそれぞれは円Ａと２つの円Ｂに接している．

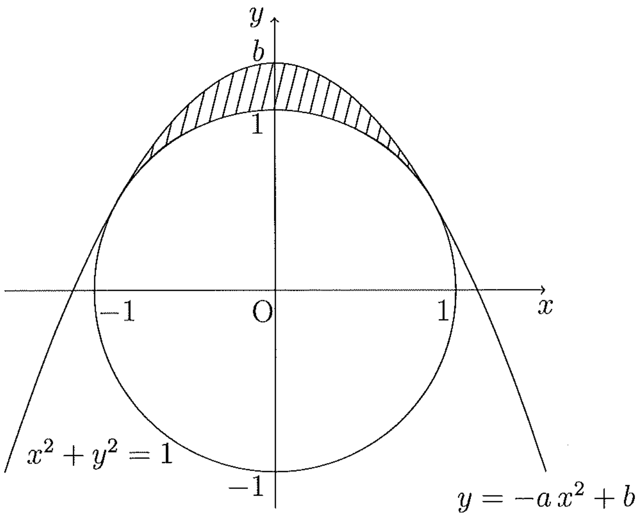
いま，円Ｂの半径を１とすると，円Ｃの半径は

$$\frac{\boxed{(32)}\boxed{(33)} + \boxed{(34)}\boxed{(35)}\sqrt{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}$$

である．

数学IV

a を正の実数，b を 1 より大きい実数としたとき，放物線 $y=-a\,x^2+b$ が，下図のように原点を中心とした半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ と 2 箇所で接している (すなわち，共有点において共通の接線を持つ).

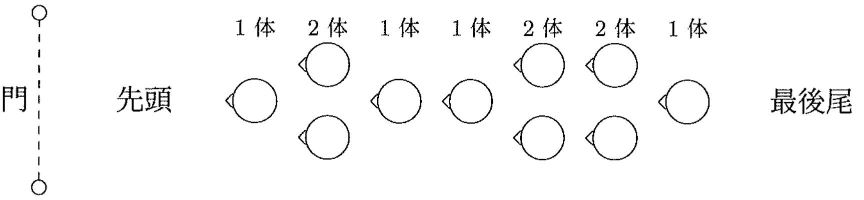


(1) 一般に，$b=\dfrac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}\,a^2+\boxed{(42)}\boxed{(43)}\,a+\boxed{(44)}\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}\,a+\boxed{(48)}\boxed{(49)}}$ である.

(2) 特に，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とすると，放物線と円の接点は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{(50)}\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{(54)}\boxed{(55)}}}{\boxed{(56)}\boxed{(57)}}\right)$ であり，円と放物線に囲まれた上図の斜線の部分の面積は $\dfrac{\boxed{(58)}\boxed{(59)}+\boxed{(60)}\boxed{(61)}\,\pi}{\boxed{(62)}\boxed{(63)}}$ となる.

数学V

(1)　同じ人形 n 体 (n は正の整数) を，1 体または 2 体ずつ前方を向かせて列に並べる．例えば $n = 10$ のとき，下図のように先頭から 1 体，2 体，1 体，1 体，2 体，2 体，1 体のような並べ方がある．



ここで，n 体の人形の並べ方の総数を a_n とすると

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ \ldots,\ a_{12} = \boxed{(64)}\boxed{(65)}\boxed{(66)},\ a_{13} = \boxed{(67)}\boxed{(68)}\boxed{(69)},\ a_{14} = \boxed{(70)}\boxed{(71)}\boxed{(72)},\ \ldots$$

となる．ただし，列の先頭の人形の前には門があり，その門の方向を前方とする．

(2)　同じ人形 n 体 (n は 2 以上の整数) を，2 体または 3 体ずつ前方を向かせて列に並べる．その並べ方の総数を b_n とすると

$$b_2 = 1,\ b_3 = 1,\ b_4 = 1,\ \ldots,\ b_{12} = \boxed{(73)}\boxed{(74)}\boxed{(75)},\ b_{13} = \boxed{(76)}\boxed{(77)}\boxed{(78)},\ b_{14} = \boxed{(79)}\boxed{(80)}\boxed{(81)},\ \ldots$$

となる．ただし，列の先頭の人形の前には門があり，その門の方向を前方とする．

総

数学VI

A 社は B 氏を報酬 w で雇っている (w は正の実数). A 社の売り上げは B 氏の努力水準に依存しており, B 氏の努力水準が低いと A 社の売上は 200 だが, B 氏の努力水準が高い場合, A 社の売上は 70% の確率で 500 となり, 30% の確率で 200 のままとなる. そして, このことは B 氏も知っている. ただし, B 氏は努力水準を高める際に 17.5 の苦痛を感じる. そのため, 報酬 w の下で努力水準を高めると, B 氏の実質的な報酬は $w - 17.5$ となってしまう. B 氏は完全にテレワークをしており, B 氏の努力水準を A 社が直接知ることはできないし, B 氏が努力水準を高めるよう強制することもできない. すると, $w > w - 17.5$ であることから, B 氏は努力水準を高めないことが合理的な行動となる.

以下では, 不確実性下の意思決定をあつかっているが, (1), (2), (3) のいずれにおいても, A 社, B 氏共に期待値の大小のみに関心があるものと仮定して解答すること.

(1) いま, A 社は売上が 500 になったときには B 氏の報酬を w_1 に引き上げ, 200 のときには w_0 にすえおくアイデアを思いついた. B 氏が努力水準を高めるためには, $w_1 \geqq w_0 + \boxed{(82)}\boxed{(83)}\boxed{(84)}.\boxed{(85)}\boxed{(86)}$ である必要がある.

次に, B 氏は, A 社をやめても他の会社に報酬 100 で雇われることが可能であるとする.

(2) A 社の利潤を売上から B 氏への報酬を引いた残りだと単純化すると, w_1 と w_0 を適切に定めることにより, B 氏に A 社をやめさせず, かつ努力水準を高めさせるためには, A 社の利潤の期待値を $\boxed{(87)}\boxed{(88)}\boxed{(89)}.\boxed{(90)}\boxed{(91)}$ 以下とする必要がある. また, A 社の利潤の期待値が最大化されたとき, $w_1 : w_0 = 5 : 4$ を満たす w_0 の値は $\boxed{(92)}\boxed{(93)}\boxed{(94)}.\boxed{(95)}\boxed{(96)}$ である.

以下では, B 氏の w_0 の値をこの $\boxed{(92)}\boxed{(93)}\boxed{(94)}.\boxed{(95)}\boxed{(96)}$ とする.

(3) 実は, B 氏の関心は報酬 w そのものではなく, そこから得られる満足と解釈される $10\sqrt{w}$ であることが分かった. そのため, 努力水準を高める際の苦痛 17.5 もこの満足から差し引かれ, 努力水準を高めたときの B 氏の満足は $10\sqrt{w} - 17.5$ となる. B 氏は (実質的な) 報酬を最大化する人ではなく, 満足を最大化する人だとしたとき, B 氏に A 社をやめさせず, かつ努力水準を高めさせるためには, $w_1 \geqq \boxed{(97)}\boxed{(98)}\boxed{(99)}.\boxed{(100)}\boxed{(101)}$ でなければならない.